LINEARNA ANALIZA NA GRUPAH ZA REŠITEV NEKATERIH NALOG V KINEMATIKI IN DINAMIKI ROBOTOV

Murray: A mathematical introduction to robotic manipulators, CRC Press, 1994

Diferenciabilne mnogoterosti:
Definicija Lijevih grup
Višji odvodi v prostorih linearnih operatorjev
Taylorjeva formula + eksponencialna formula na grupi GL
Lijeva algebra
SE(3) grupe in se(3) algebra
Eksponencialna produktna rešitev
Problem inverzne dinamike robotskih manipulatorjev

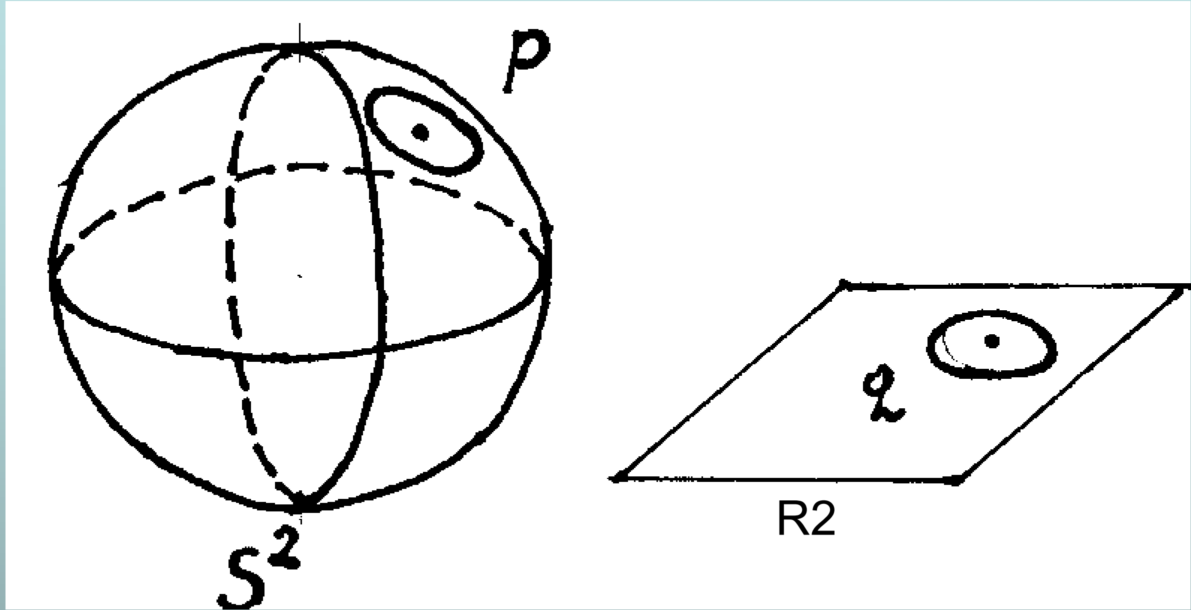
Lijeve grupe:

Algebrajske lastnosti

Topološke lastnosti:

identifikacija točke: $g_i \to g_i(x)$, *i* je odvisen od ene ali več variabel v *x*

MATRIČNE LIJEVE GRUPE : KARTA, ATLAS



Lijeva grupa je grupa in hkrati gladka mnogostranost. Lijevo grupo lahko parametruziramo s točkami te mnogostranosti. ‘Gladkost’ pomeni, da sta grupni produkt in operacija invertiranja prav tako gladki operaciji. Na sliki je S2 nelinearna mnogostranost in je lokalno evklidski prostor, kar v osnovi ne velja globalno. Okolico točke *p v S2* lahko preslikamo v ravnino R2 v okolico točke q=0, govorimo o karti. Množica vseh točk, ki pokrijejo mnogoterost, imenujemo atlas. Če je S2 grupa, lahko vsako točko na S2 z levo translacijo projiciramo v severni pol (normalno je tu enota grupe). Tako je v principu v okolici točke q, če vanjo preslikamo enoto, možno analizirat lastnosti cele Lijeve grupe, posebno ker se izkaže, da v točki q delamo z linearnim vektorskim prostorom.

PRIMER SL(2,R) GRUPE

parametrizacija grupe SL(2,R) iz mnogoterosti $a,b,c \in \mathbb{R}^3$

$$\det(A) = +1; \quad (a,b,c) = M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{1+a} \end{pmatrix};$$

linearizacija: $(\mathrm{a,b,c}) \to (\delta a, \delta b, \delta c) \to M(\delta a, \delta b, \delta c) = \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & \dfrac{1+\delta b.\delta c}{1+\delta a} \end{pmatrix}$

$$(\delta a, \delta b, \delta c) \to I_2 + \delta a.X_a + \delta b.X_b + \delta c.X_c = \begin{pmatrix} 1+\delta a & \delta b \\ \delta c & 1-\delta a \end{pmatrix}$$

bazni vektorji so 2×2 matrike

$$\mathrm{X_a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial M(a,b,c)}{\partial a}\Big|_{(a,b,c)=(0,0,0)}$$ in analogno za X_b, X_c

POVZETEK, INVERSIJA LINEARIZACIJE

POVZETEK:
Unifikacija algebrajskih in topoloških lastnosti:
Gladkost preslikave grupne operacije
Gladkost invetzne preslikave vsakega elementa grupe

Linearizacija Lijeve grupe v okolici enote pripomore k enormni poenostavitvi v študiju Lijevih grup v številnih okoljih.

Plan:
Taylorjev razvoj operacije grupne kompozicije.

INVERZIJA LINEARIZACIJE :

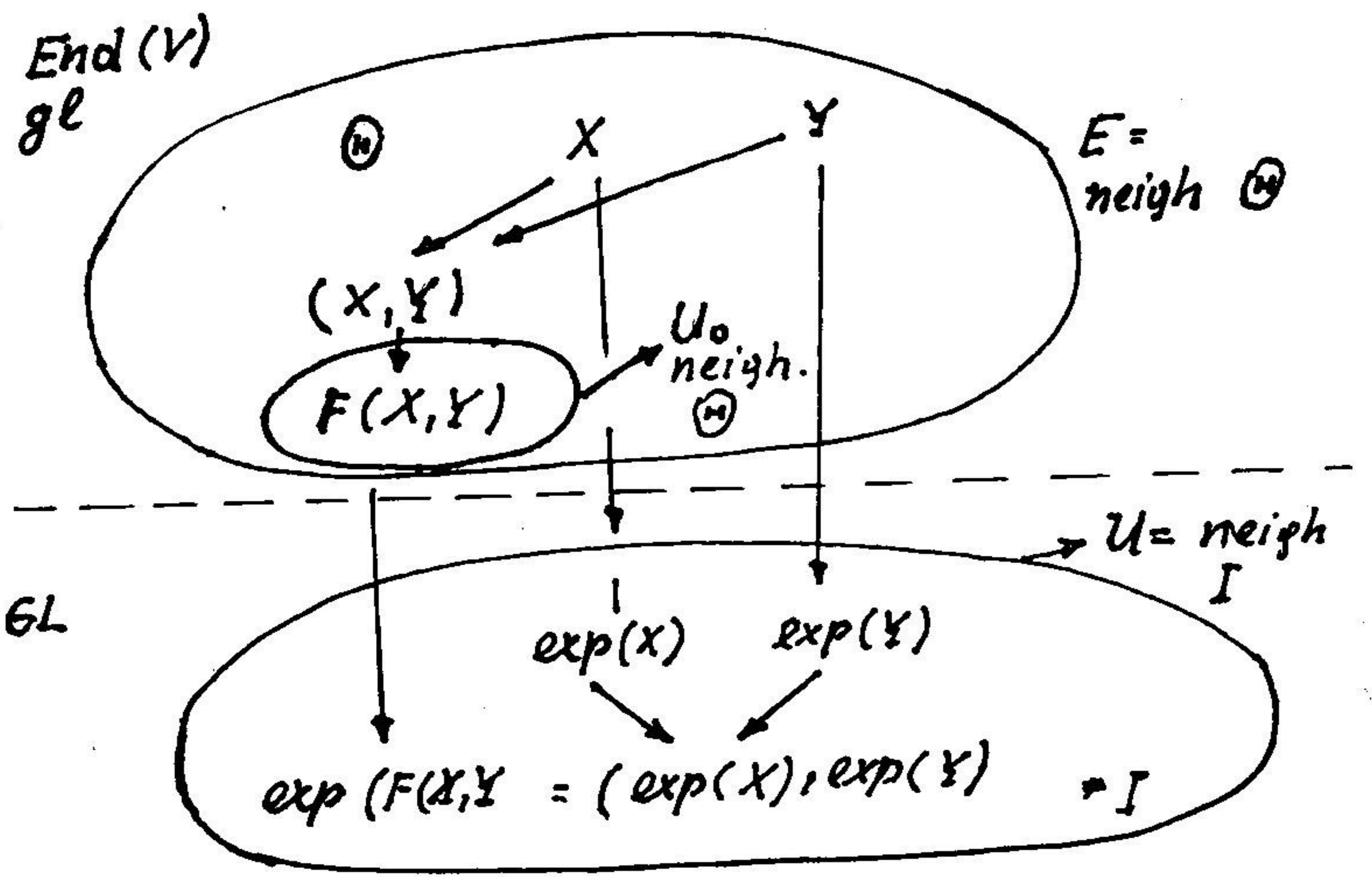
$X \ldots majhen \quad linearni \quad$ operator

$\left(I+\varepsilon X\right)\ldots$'majhen' operator: kako razširiti njegovo domeno :

z iterativno uporabo:

$$\left(I+\varepsilon X\right)\rightarrow \lim_{k\to\infty}\left(I+\frac{1}{k}X\right)^{k}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{X^{n}}{n!}=\exp\left(X\right)$$

PRESLIKAVA OKOLICE TOČKE ‘0’ V OKOLICO TOČKE ‘1’ V ENDOMORFIZMIH En(GL)



$$F : (E \times E) \to U_0 : (X,Y) \to F(X,Y)$$

$$EXP(F(X,Y) = (EXP(X), EXP(Y))$$

$$F(X,Y) = \log(\exp(X), \exp(Y))$$

$$\exp F(sX, tY) = (\exp sX, \exp(tY))$$

TAYLOR RAZVOJ 1

$$\left(\exp(X)\exp(Y)\right)=\exp\left(F(X,Y)\right)\Rightarrow F(X,Y)=\log\left(\exp X,\exp Y\right)\quad(1.6)$$

$$\left(\exp(sX)\exp(tY)\right)=\exp\left(F(sX,tY)\right)$$

Za F naredimo Taylor razvoj okoli ničle (Θ)

$$\Theta=(0,0)\in E\times E:\quad Z=(sX,tY)\Rightarrow\Theta+Z=(sX,tY)=Z\Rightarrow$$

$$F(Z)=F(\Theta)+DF(\Theta)Z+\frac{D^2F(\Theta)}{2}Z^{(2)}+\ldots(1.8)$$

posebej za slučaj, if s=t :

$$F(sX,sY)=F(\Theta)+sDF(\Theta)(X,Y)+s^2\frac{D^2F(\Theta)}{2!}\left((X,Y),(X,Y)\right)+\ldots(1.9)$$

$$\exp(0)=I\Rightarrow$$

$$\exp F(0,0)=\left(\exp(0)\exp(0)\right)=I.I=I=\exp(0)\Rightarrow$$

$F(\Theta)=F(0,0)=0\quad(1.10)\quad$ logaritmiraj enačbo (1.10)

potem: $\exp(sX)=\left(\exp(sX)\exp(0)\right)=\exp F(sX,0)\quad(1.11)$

logaritmiraj (1.11) , Taylorjeva vrsta (1.9) postane:

TAYLOR RAZVOJ 2

$$sX = F(sX,0) = sDF(\Theta)(X,0) + \sum_{k=2}^{\infty} s^k \frac{D^k F(\Theta)}{k!}(X,0)^k \quad (1.12)$$

V (1.12) primerjaj na levi in desni potence s : sledi

$$DF(\Theta)(X,0) = X; \quad \text{in: } D^k F(\Theta)(X,0)^k = 0; \ \forall\ k \geq 2 \quad (1.13)$$

simetrična oblika za Y :

$$DF(\Theta)(0,Y) = Y; \quad in\text{: } D^k F(\Theta)(0,Y)^k = 0; \ \forall\ k \geq 2 \quad (1.14)$$

Iz (1.12),(1.13) $\Rightarrow$

$$DF(\Theta)Z = DF(\Theta)(sX,tY) = \quad (\text{ seštevanje v vektorskem prostoru })$$

$$= DF(\Theta)\left[(sX,0) + (0,tY)\right] =$$

$$sDF(\Theta)(X,0) + tDF(\Theta)(0,Y) = sX + tY \qquad (1.15)$$

Za terme z drugim odvodom:

$$D^2 F(\Theta) Z^2 = D^2 F(\Theta)\left[(sX,0) + (0,tY),(sX,0) + (0,tY)\right]$$

$$= D^2 F(\Theta)(sX,0)^2 + D^2 F(\Theta)(0,tY)^2 + 2D^2 F(\Theta)\left[(sX,0),(0,tY)\right] \quad (1.16)$$

TAYLOR RAZVOJ 3

Glede na desno stran enačb (1.13), (1.14) prva dva terma v (1.16) izgineta, od enačbe (1.16) ostane:

$$D^2F(\Theta)Z^2 = 2st\,D^2F(\Theta)\big[(X,0),(0,Y)\big] \quad (1.17)$$

Če vstavimo (1.15), (1.16) v Taylorjev razvoj - formula (1.8)

$$F(sX,tY) = sX + tY + st\,\tau(X,Y);$$

$$\tau(X,Y) = D^2(\Theta)\big[(X,0),(0,Y)\big] \quad (1.18)$$

(kot mora skalarni produkt tudi biti): $\tau : End(V)\times End(V) \to End(V)$ je bilinearen :

$$\tau(X+Y)U = \tau(X,U) + \tau(Y,U); \quad a \in \mathbb{R}, \quad \tau(aX,Y) = a\tau(X,Y) \quad (1.19)$$

DEFINICIJA LIJEVE ALGEBRE, LASTNOSTI

DEFINITION: Lijeva algebra: neasociativna algebra A nad poljem K
je vektorski prostor A skupaj z bilinearnim množenjem
/ Lie bracket/ komutator $\tau \in L^2(\mathrm{A},\mathrm{A})$
Algebra gl(V) določa the množenje v GL(V) lokalno do reda2.

$$\exp(sX, tY) = \exp\left(sX + tY + st\tau(X,Y)\right) + \varepsilon_2(sX, tY) \quad (1.20)$$

Rabimo različne lastnosti GL(V) za določitev identitet za gl(V). Term napake ε_2
je dejansko določen s subalgebro v gl(V) ... Campbell-Hausdorff teorem

LASTNOSTI:

$\tau(X,Y) = -\tau(Y,X)$:

dokaz:

$$\exp(-tY)\exp(-sX) = \exp\left(-tY - sX + st\tau(Y,X)\right) \quad (1.21)$$

Inverza desne strani enačbe (1.20)

$$\exp\left(-sX - tY - st\tau(X,Y)\right) \quad (1.22)$$

če primerjamo zadnje terme v (1.21),(1.22) dobimo : $\tau(X,Y) = -\tau(X,Y)$

KONSTRUKTIVNI ALGORITEM ZA KOMUTATOR:

Konstruktivni algoritem za τ: razvoj po Taylorju leva stran enačbe (1.20)

$$\exp(sX)\exp(tY) = (I + sX + \frac{1}{2}s^2X^2 + \ldots)(I + sY + \frac{1}{2}s^2Y^2 + \ldots) =$$

$$= I + sX + tY + \frac{1}{2}s^2X^2 + stXY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + \ldots \quad (1.23)$$

razvoj po Taylor-ju desna stran enačbe (1.20)

$$\exp\left(sX + tY + st\tau\left(X,Y\right) + \ldots\right) = I + \left(sX + tY + st\tau\left(X,Y\right) + \ldots\right) +$$

$$\frac{1}{2}\left(sX + tY + st\tau\left(X,Y\right) + \ldots\right)^2 + \ldots =$$

$$I + sX + tY + st\tau\left(X,Y\right) + \frac{1}{2}\left(s^2X^2 + stXY + stYX + t^2Y^2\right) + \ldots (1.24)$$

Enačimo koeficiente pri st v (1.23), (1.22)

$$XY = \tau\left(X,Y\right) + \frac{1}{2}XY + \frac{1}{2}YX \to \tau\left(X,Y\right) = \frac{1}{2}\left(XY - YX\right)$$

ALGEBRAIČNE LASTNOSTI TANGENTNEGA PROSTORA ; tangentni prostor je vektorski prostor

Tangentni prostor je Lijeva algebra s komutatorjem: exp(X) je definiran za vsako n x n matriko X : operator 'exp' zagotavlja gladko pot s predpisanim tangentnim vektorjem v točki enote 1.

$$A(t) = \exp(tX);\rightarrow A(0) = 1; A'(0) = X; \quad (1.26)$$

Račun tangentnih prostorov: O(n);SO(n);U(n);SU(n);Sp(n),GL(n,c),SL(n,c)

Tangentni prostor je vektorski prostor: dokaz:

$$X = A'(0); \quad Y = B'(0); \quad A(t), B(t) \in G \text{ gladek}; \quad A(0) = B(0) = 1 \rightarrow$$

$$X, Y \in T_1(G) \Rightarrow C(t) = A(t)B(t) \text{ gladek }, C(0) = 1 \Rightarrow C'(0) \in T_1(G)$$

$$C'(0) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} A(t)B(t) = A'(0)B(0) + A(0)B'(0) = X + Y \quad (1.30)$$

ZAPRTOST TANGENTNEGA PROSTORA POD KOMUTATORJEM (LIE BRACKETT)

$X,Y \in T_1 \to [X,Y] \in T_1(G)$

DOKAZ

$A(0) = B(0) = 1, A'(0) = X; B'(0) = Y; \to X,Y \in T_1(G)$

pot pri fiksiranem s: $\quad C_s = A(s)B(t)A(s)^{-1} \to$

$C_s'(0) = A(s)B'(0)A(s)^{-1} = A(s)YA(s)^{-1}; \quad D(s) = A(s)YA(s)^{-1}$

diferenciranje $D(s)$: $\quad D'(0) = A'(0)YA(0)^{-1} + A(0)Y(-A'(0)) =$

$= XY - YX = [X,Y]$

GRUPA SE(3) ALGEBRA se(3)

$$\begin{pmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(3); \quad \begin{pmatrix} R_1 & p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} R_2 & p_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 R_2 & R_1 p_2 + p_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

exp, log imamo polno pravico logaritmirati of SE(3)

$$\log\left(eyes(3),\left[p_x, p_y, p_z\right];\left[0,0,0\right],0\right) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R = \exp(\hat{\omega}.\vartheta)$

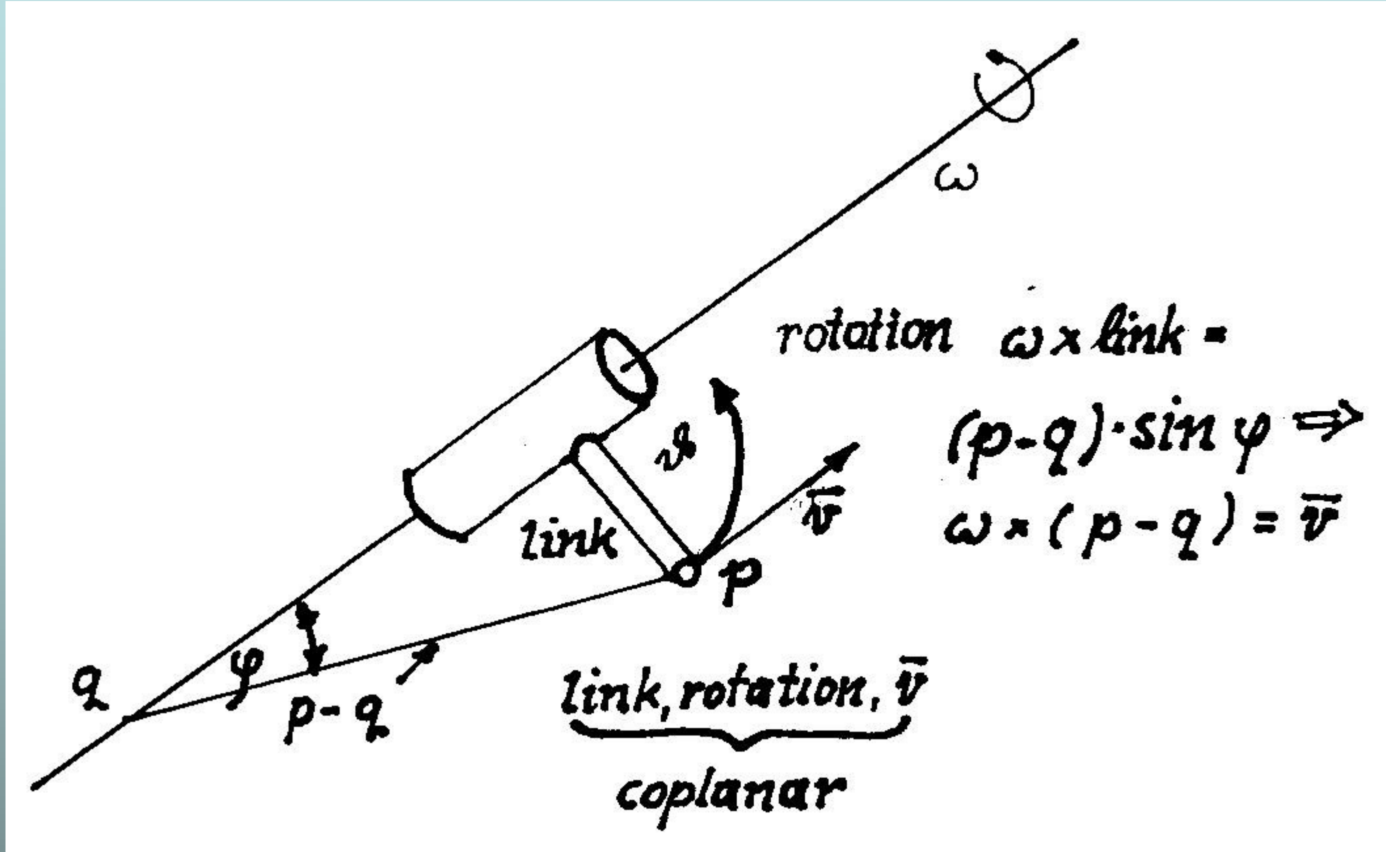
$\log(\exp(\hat{\omega}.\vartheta)) = \hat{\omega}.\vartheta;$: leva gornja matrika v se(3)

pričakovana oblika se(3)

$$se(3) = \begin{pmatrix} \hat{\omega}.\vartheta & v \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$v\ldots$ mora vključevati ϑ direktno zaradi homogenosti: rabimo geometrični konstrukt???????????

GEOMETRIČNI KONSTRUKT ZA DEFINIRANJE se(3) ZA ROTACIJSKI ZGLOB/SKLEP

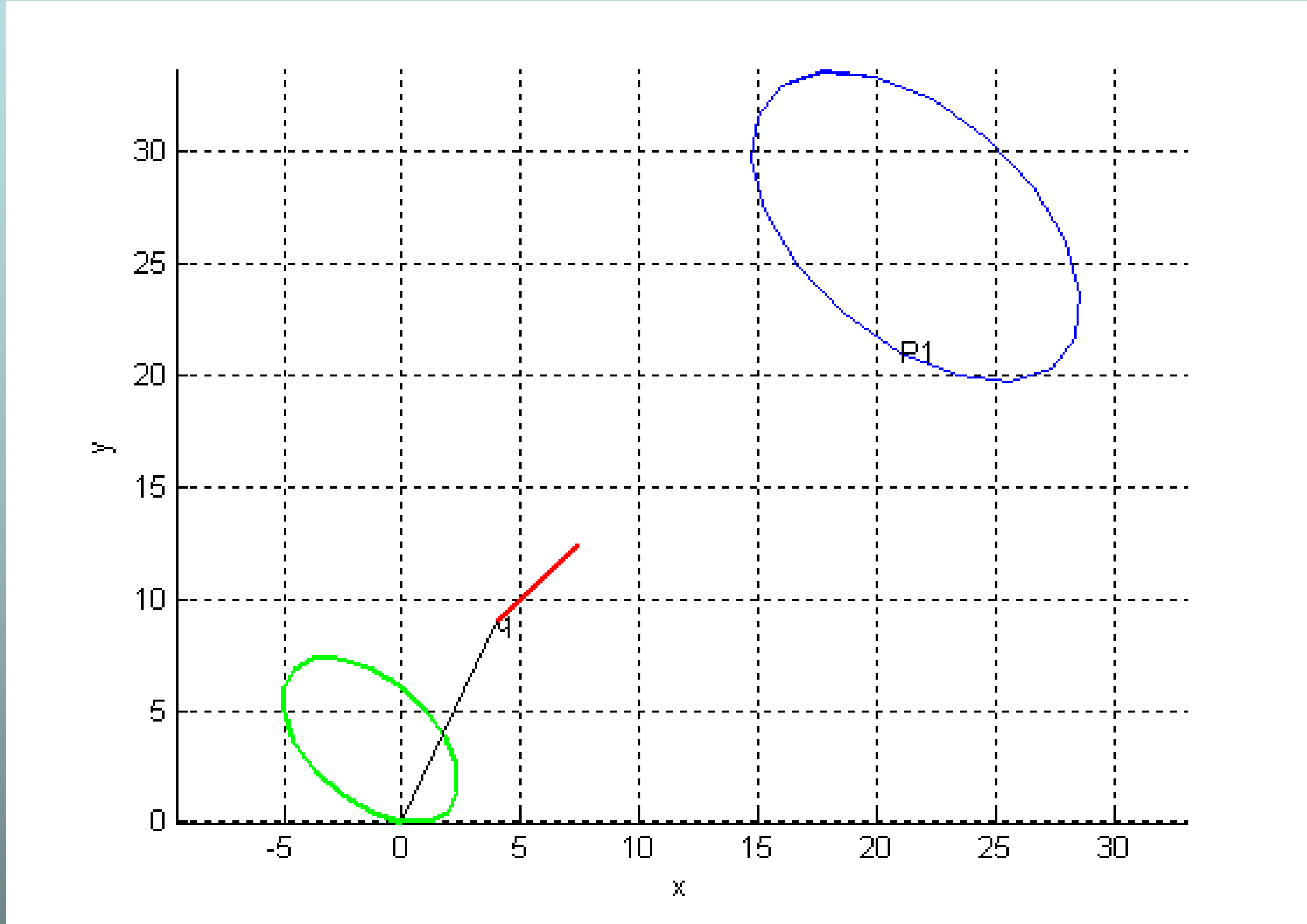


$$\overline{v} = \omega \times (p - q); \quad p = 0$$

$$se(3) = \begin{pmatrix} \hat{\omega}.\vartheta & -\omega \times q.\vartheta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} \hat{\omega} & -\omega \times q \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad SE(3) = \exp(\xi.\vartheta)$$

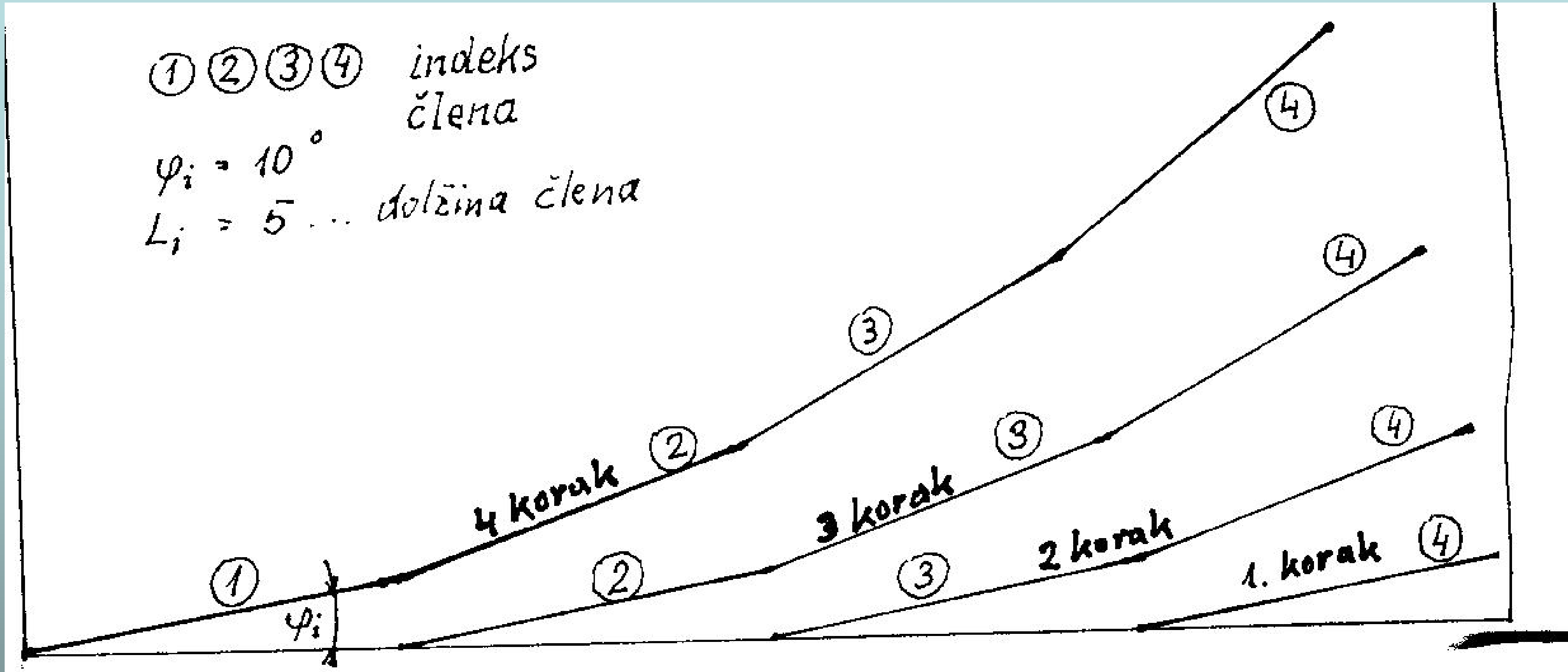
PROGRAMIRANJE POSAMEZNEGA ROTACIJSKEGA ZGLOBA



ROTACIJSKI ZGLOB; zelena : sprememva v konfiguraciji se(3)

modta: se(3) , množeno s pozicijo p

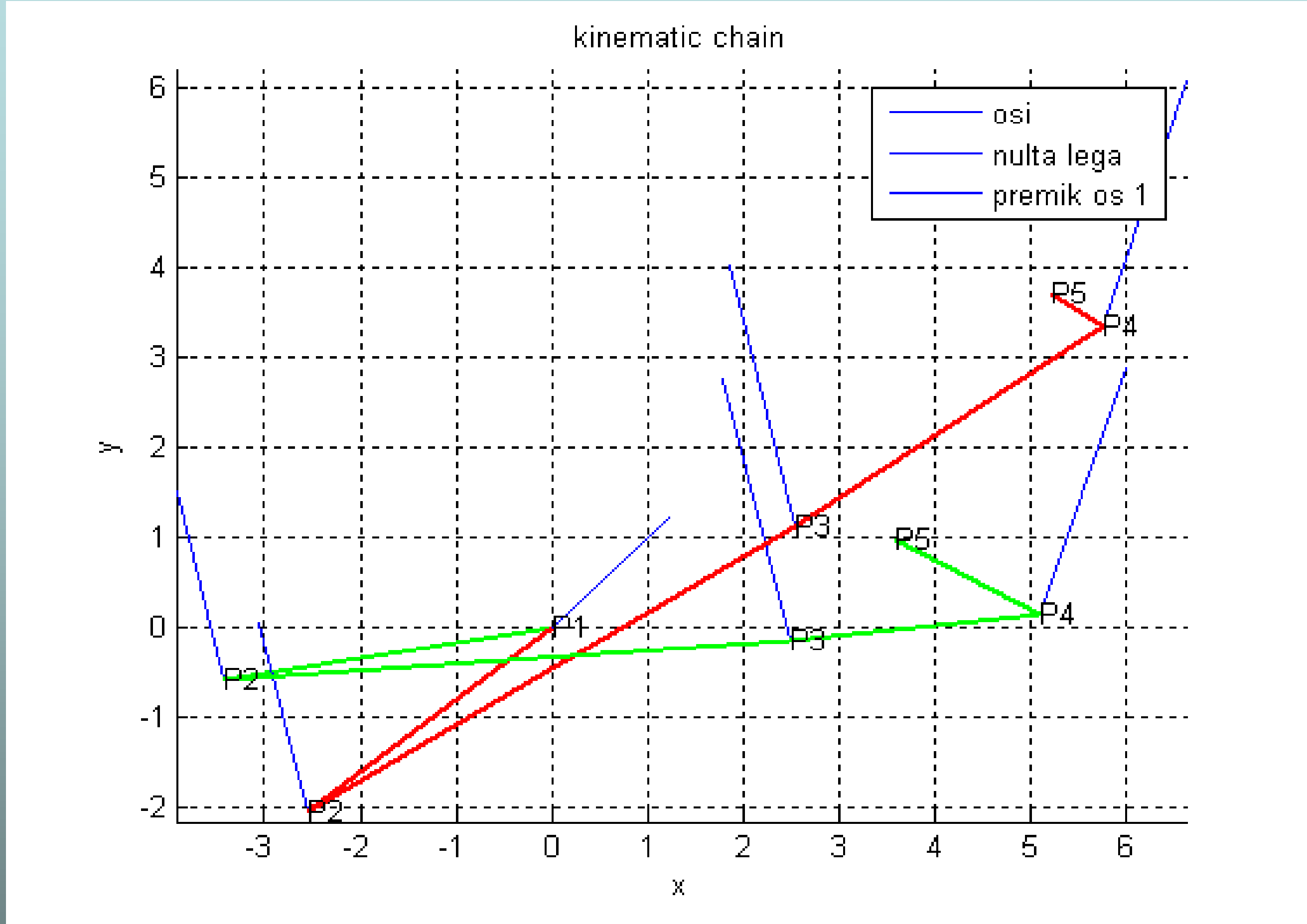
EXPONENTIALNA PRODUKTNA REŠITEV- računanje nazaj



končna pozicija vrha =

$$\exp(\xi_1\vartheta_1)\exp(\xi_2\vartheta_2)\ldots\exp(\xi_N\vartheta_N) * \text{začetna pozocija vrha}$$

EXPONENTIALNA PRODUKTA REŠITEV : račun naprej



$$\exp(\xi_1 \vartheta_1) M_1 \exp(\xi_2 \vartheta_2) M_2 \ldots \exp(\xi_N \vartheta_N) M_N$$

REKAPITULACIJA

- Parametrizacija Lijevih grup – parametri iz mnogoterosti, differenciabilnost, gladkost, difeomorfizem
- Grafična predstavitev: preslikava okolice ničle v okolico enote in obratno
- Exponentialna preslikava, logaritmična preslikava
- Razvoj endomorfizmov po Taylorju :
- Komutator
- Liejeva algebra
- Tangentni prostor : osnova Lijeve algebre
- SE-3 groupa trdega telesa
- Generiranje se-3 algebre – geometrični konstrukt
- Rotacijski in cilindrični zglob
- Produktna exponencialna rešitev: naprej, nazaj

$$F(sX, tY) = sX + tY + st\tau(X, X)$$

$$[X, Y] = XY - YX$$

REFERENCE

Križanič, F.: Linearna analiza na grupah, Državna založba Slovenije, Ljubljana, 1982

Sagle,A.A.,Walde,R.E.: Introduction to Lie groups and Lie algebras, Academic Press, New York 1973

Gilmore,R.: Lie groups, physics and geometry, Cambridge University Press, Cambridge, 2008

Murray,R.M.: A mathematical introduction to robotic manipulation, CRC Press, 1994

Park,F.C.,Bobrow,J.E.,Ploen,S.R.: A Lie Group formulation of robot dynamics, The International Journal of Robotics Research Vol 14, No.6,1995, 609-618

Stillwell,J.: Naive Lee Theory, Springer, 2008

Featherstone.R.: Robot dynamics algorithms, Kluwer, Boston, 1987

Gilmore,R.: Lie groups. Physics, Geometry, Cambridge, 2008